ÁLGEBRA

OPCIÓN A

a) Discutir y resolver en función de los valores del parámetro ***m*** el sistema lineal

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ mx+m^2y+m^2z=1 \\ mx+my+m^2z=1 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} = m^4+m^3+m^2-m^3-m^3-m^3 = m^4-2m^3+m^2 = (m^2-2m+1)m^2 \Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0 \Rightarrow (m^2-2m+1)m^2=0 \Rightarrow \begin{cases} m^2=0 \Rightarrow m=0 \\ m^2-2m+1=0 \Rightarrow \Delta=4-4=0 \Rightarrow m=\frac{2}{2}=1 \end{cases}$$

$$\forall m \in \Re - \{0\ ,1\} = rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ m=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow 0z \neq 1 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Si\ m=1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$Solución(1-\lambda-\mu\ ,\ \lambda\ ,\ \mu),\ \lambda,\mu \in \Re$$

b) Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, determinar el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix} = a \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a^{-1} & 0 & 1 \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix} = a^2 \cdot a^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a^{-1} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix} = a^2 \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = a^2 \cdot a^{-2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

OPCIÓN B

a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, calcular la inversa de la matriz $\boldsymbol{A^n}$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdots\cdots A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\n-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left|A^n\right|=\begin{vmatrix}1&0&0\\n&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow \exists\left(A^n\right)^{-1}\Rightarrow A^{-n}=\frac{1}{\left|A^n\right|}\cdot adj\left[\left(A^n\right)^t\right]\Rightarrow \left(A^n\right)^t=\begin{pmatrix}1&n&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\left[\left(A^n\right)^t\right]=\begin{pmatrix}1&0&0\\-n&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-n}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\-n&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-n&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) Estudiar para que valores del parámetro $\alpha\in\Re$, existe un único polinomio **$P(x) = a + bx + cx^2$** que satisface a **$P(0) = \alpha$**, **$P(1) = 0$** y **$P(-1) = 0$**

$$\begin{cases} P(0)=\alpha\Rightarrow a+b.0+c.0^2=\alpha\Rightarrow a=\alpha \\ P(1)=0\Rightarrow a+b.1+c.1^2=0\Rightarrow b+c=-\alpha \\ P(-1)=0\Rightarrow a+b.(-1)+c.(-1)^2=0\Rightarrow -b+c=-\alpha \end{cases}\Rightarrow 2c=-2\alpha\Rightarrow c=-\alpha\Rightarrow b-\alpha=-\alpha\Rightarrow b=0$$

$$P(x)=\alpha-\alpha.x^2=\alpha\left(1-x^2\right)\Rightarrow \exists P(x)\Rightarrow \forall\alpha\in\Re$$

GEOMETRÍA

OPCIÓN A

Sean los vectores $\vec{u}=(1\,,-1\,,3)$, $\vec{v}=(-2\,,2\,,1)$, $\vec{w}=(3\,,-2\,,5)$; calcular:

a) $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$.

b) $\vec{u}\times\left(\vec{v}-\vec{w}\right)$

c) La ecuación del plano que pasa por el punto **P(0 , 0 , 1)** y es perpendicular al vector $\vec{u}$

d) El ángulo que forman $\vec{u}\ y\ \vec{v}$

$a)$

$$\vec{v}+\vec{w}=(-2\,,2\,,1)+(3\,,-2\,,5)=(1\,,0\,,6)\Rightarrow \vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=(1\,,-1\,,3)\cdot(1\,,0\,,6)=1.1+(-1).0+3.6=19$$

$b)$

$$\vec{v}-\vec{w}=(-2\,,2\,,1)-(3\,,-2\,,5)=(-5\,,4\,,-4)\Rightarrow \vec{u}\times\left(\vec{v}-\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 3\\ -5 & 4 & -4\end{vmatrix}=$$

$$=4\vec{i}-15\vec{j}+4\vec{k}-5\vec{k}-12\vec{i}+4\vec{j}=-8\vec{i}-11\vec{j}-\vec{k}$$

$c)$

$$\pi\equiv(1\,,-1\,,3)\cdot(x-0\,,\,y-0\,,\,z-1)=0\Rightarrow \pi\equiv x-y+3z-3=0$$

$d)$

$$\cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)=\frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\frac{\left|(1\,,-1\,,3)\cdot(-2\,,2\,,1)\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}=\frac{\left|-2-2+3\right|}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{9}}=\frac{\left|-1\right|}{3\cdot\sqrt{11}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}}{33}$$

$$\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)=arc\,\cos\frac{\sqrt{11}}{33}=84^{\circ}13'55''$$

OPCIÓN B

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x-2y+z=0$ y $\pi_1 \equiv x-2y-z=3$

b) Considerar la recta $r \equiv \begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases}$. Analizar si el punto **P(6 , 2 ,2)** se halla o no sobre la recta paralela a la anterior que pasa por el origen

a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1\ ,-2\ ,1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1\ ,-2\ ,-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow No\ son\ paralelos \Rightarrow Son\ sec antes$$

$$Se\ cortan\ formando\ la\ recta\ s \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-2y-z-3=0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x-y-3z=1 \\ -x+3y-z=-5 \end{cases} \Rightarrow 2y-4z=-4 \Rightarrow y-2z=-2 \Rightarrow y=2z-2 \Rightarrow x-(2z-2)-3z=1 \Rightarrow$$

$$x-2z+2-3z=1 \Rightarrow x=-1+5z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1+5\lambda \\ y=-2+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_t} = (5\ ,2\ ,1) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=0+5\mu \\ y=0+2\mu \\ z=0+\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6=5\mu \Rightarrow \mu=\dfrac{6}{5} \\ 2=2\mu \Rightarrow \mu=1 \\ 2=\mu \end{cases} \Rightarrow Incompatible \Rightarrow No\ pertenece$$

ANÁLISIS

OPCIÓN A

1.- a) Calcular los siguientes límites $\lim_{x\to\infty} \frac{12x^2\sqrt{x^2-7x}}{\sqrt{9x^6+5x}}$, $\lim_{x\to 0}(\cos x + sen\ x)^{\frac{1}{x}}$

b) Obtener $\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} x\cos\left(x^2\right)dx$

$a)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12x^2\sqrt{x^2-7x}}{\sqrt{9x^6+5x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{12\frac{x^2}{x^2}\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}}}{\sqrt{9\frac{x^6}{x^6}+5\frac{x}{x^6}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{12\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}{\sqrt{9+\frac{5}{x^5}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{12\sqrt{1-0}}{\sqrt{9+0}} = \frac{12}{3} = 4$$

$$L = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{sen\ x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+tg\ x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{tg\ x}}\right)^{\frac{1}{x}} = \left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{tg\ x}}\right)^{\frac{1}{tg\ x}}\right]^{\frac{1}{x}\cdot tg\ x} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x}{x} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 0} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow L = e^1 = e$$

$b)$

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} x\cos\left(x^2\right)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t\ \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left[sen\ t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2}\cdot\left(sen\ \pi - sen\ \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot(0-1) = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\pi} \Rightarrow t=\pi \\ x=\sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2.- Sea $f\left(x\right)=2x+sen\left(2x\right)$

a) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo

b) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de extremos relativos

c)¿Son los puntos $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad con \ \ k\in\Re$, puntos de inflexión de **f(x)**?

a) No tiene asíntotas verticales

Tampoco horizontales $\left(los\ límites\ son+\infty\ y-\infty\ según\ tienda\ a\ \infty\ o-\infty\right)$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+sen\left(2x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{sen\left(2x\right)}{x}=2+\frac{1\left(valor\ máximo\right)}{\infty}=2+0=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[2x+sen\left(2x\right)-2x\right]=\lim_{x\to\infty}sen\left(2x\right)\Rightarrow No\ definido$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(-x\right)+sen\left(-2x\right)}{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{-x}+\lim_{x\to\infty}\frac{sen\left(-2x\right)}{-x}=2+\frac{1\left(valor\ máximo\right)}{-\infty}=2+0=2$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[-2x+sen\left(-2x\right)-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[-4x+sen\left(2x\right)\right]=-\infty\Rightarrow No\ definido$$

No existen Asíntotas oblicuas

$b)$

$$f'\left(x\right)=2+2\cos\left(2x\right)=2\left[1+\cos\left(2x\right)\right]\Rightarrow Crecimiento\Rightarrow f'\left(x\right)>0\Rightarrow 2\left[1+\cos\left(2x\right)\right]>0\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ 1+\cos\left(2x\right)>0\Rightarrow\cos\left(2x\right)>-1\Rightarrow\forall x\in\Re\end{array}\right.\Rightarrow Crecimiento\Rightarrow\forall x\in\Re\Rightarrow$$

$$f'\left(x\right)=0\Rightarrow 2\left[1+\cos\left(2x\right)\right]=0\Rightarrow 1+\cos\left(2x\right)=0\Rightarrow\cos\left(2x\right)=-1\Rightarrow 2x=arc\cos\left(-1\right)=\pi+2k\pi,k\in\Re$$

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\Re\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=2\cdot\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+sen\left[2\cdot\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right]=\pi+2k\pi+0\ ,\ k\in\Re$$

$c)$

$$f''\left(x\right)=-4\ sen\left(2x\right)\Rightarrow f''\left(x\right)=0\Rightarrow-4\ sen\left(2x\right)=0\Rightarrow sen\left(2x\right)=0\Rightarrow 2x=0+k\pi,k\in\Re\Rightarrow$$

$$Puntos\ de\ \inf lexión\Rightarrow x=0+k\frac{\pi}{2}\Rightarrow f\left(0+k\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\left(0+k\frac{\pi}{2}\right)+sen\left[2\cdot\left(0+k\frac{\pi}{2}\right)\right]=\pi+2k\pi+0\ ,\ k\in\Re$$

OPCIÓN B

1.- .- Sea $f(x)=\frac{1}{x-x^2}$

a) Determinar su dominio

b) Estudiar si **f(x)** es una función simétrica respecto al eje de coordenadas.

c) Obtener el área encerrada por **f(x)** y el eje **OX** entre **x =** $\frac{1}{4}$ y **x =** $\frac{3}{4}$

$a)$

$$x-x^2=0 \Rightarrow x(1-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow \frac{1}{0-0^2}=\frac{1}{0} \Rightarrow Discontinuidad \\ 1-x=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \frac{1}{1-1^2}=\frac{1}{0} \Rightarrow Discontinuidad \end{cases}$$

$$Dom(f)=\forall x \in \Re-\{0\,,1\}$$

$b)$

$$\begin{cases} -f(x)=-\frac{1}{x-x^2} \\ f(-x)=\frac{1}{(-x)-(-x)^2}=\frac{1}{-x-x^2}=-\frac{1}{x+x^2} \end{cases} \Rightarrow f(-x)\neq -f(x) \Rightarrow No\ es\ simétrico$$

$c)$

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4>0 \Rightarrow$$

$$A=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{1}{x-x^2}\,dx=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{1}{x(1-x)}\,dx=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{1}{x}\,dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1-x}\,dx=\left[\ln x\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}-\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}}\frac{1}{t}\,dt=\left(\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{1}{4}\right)-\left[\ln t\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}}$$

$$1-x=t \Rightarrow -dx=dt \Rightarrow dx=-dt \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \Rightarrow t=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \\ x=\frac{3}{4} \Rightarrow t=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x(1-x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{1-x}=\frac{A(1-x)+Bx}{x(1-x)} \Rightarrow A(1-x)+Bx=1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow A(1-0)+B.0=1 \Rightarrow A=1 \\ x=1 \Rightarrow A(1-1)+B.1=1 \Rightarrow B=1 \end{cases}$$

$$A=\ln\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}\right)-\left(\ln\frac{1}{4}-\ln\frac{3}{4}\right)=\ln 3-\ln\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\right)=\ln 3-\ln\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\frac{3}{\frac{1}{3}}=\ln 9=\ln 3^2=2\ln 3\ \ u^2$$

2.- a) Queremos vallar un campo rectangular que está junto un camino. La valla del lado del camino cuesta 5 euros por metro y la de los otros tres lados 0'625 euros por metro
Hallar el área del campo de mayor superficie que podemos cercar con 1800 euros

$$\begin{cases} 1800 = 5a + 0'625a + 2.0'625b = 5'625a + 1'25b \Rightarrow 1'25b = 1800 - 5'625a \Rightarrow b = \dfrac{1800 - 5'625a}{1'25} \\ S = ab \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = 1400 - 4'5a \\ S = ab \end{cases} \Rightarrow S = a\cdot(1400 - 4'5a) \Rightarrow S' = \frac{dS}{da} = 1400 - 4'5a - 4'5a = 1400 - 9a \Rightarrow$$

$$S' = 0 \Rightarrow 1400 - 9a = 0 \Rightarrow a = \frac{1400}{9} \Rightarrow S'' = \frac{d^2S}{da^2} = -9 > 0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow$$

$$b = 1400 - 4'5\cdot\frac{1400}{9} = 1400 - \frac{1400}{2} = 700\ m \Rightarrow a = \frac{1400}{9}\ m$$

b) Calcular para que valores de ***a*** y ***b*** la función $\begin{cases} x+1 & si \quad x \le -1 \\ a + x^2 & si \quad -1 < x < 1 \\ (b-x)^2 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$ sea continua

$$\begin{cases} \begin{cases} f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -1+1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = a + (-1)^2 = a+1 \end{cases} \Rightarrow a+1 = 0 \Rightarrow a = -1 \\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1 + 1^2 = 0 \\ f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = (b-1)^2 \end{cases} \Rightarrow (b-1)^2 = 0 \Rightarrow b-1 = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \le -1 \\ x^2 - 1 & si \quad -1 < x < 1 \\ (1-x)^2 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$$